量子力学A中間試験問題　2019/06/03　 学番 ＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（注意）解答は**解答用紙に書くこと**（両面に書いても良い）。この問題は持ち帰る事。
問題中にあらわれる記号（例えば、$|u>, \hat{\sigma}_x$ など）は、**講義で使用しているものと同じ**である。
問題４と問題５はどちらかを選択せよ（両方、解答用紙に記入した場合は**両方とも採点しない**）。

1. ド・ブロイの関係式とアインシュタインの関係式から自由粒子（ポテンシャル$V(x)=0$）が満たすべき分散関係（角振動数ωと波数kの関係式）を求めよ。

2. 位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の間の交換関係 $[\hat{x},\hat{p}]$ を求めよ
（ヒント　$\hat{p} \to -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ と置き換え、任意の波動関数 $\psi(x)$に交換子を作用させて求める）。

3. Pauliのスピン行列は $\hat{\sigma}_z$ の固有状態 $|u>, |d>$ を基底に選んだ時の表現で、

$$\hat{\sigma}_x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 、\quad \hat{\sigma}_y \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}、\quad \hat{\sigma}_z \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のように与えられる。以下の問いに答えよ。

(1) Pauli行列はどれもエルミート行列かつユニタリー行列である。$\hat{\sigma}_y$ についてこれを示しなさい。

(2) $\hat{\sigma}_x$ の固有状態 $|r>, |l>$ はそれぞれ、

$$|r> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u> + |d>), \quad |l> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u> - |d>)$$

で与えられる。$\hat{\sigma}_y|r>$, $\hat{\sigma}_y|l>$ を$|r>, |l>$を使って表せ。

<ヒント> (　$|u> \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |d> \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし、Pauli行列との積を計算する)

(3) $\hat{\sigma}_y$ の固有状態 $|i>, |o>$（それぞれ、$\hat{\sigma}_y$ の固有値$+1$, -1に対応）は

$$|i> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u> + i|d>), \quad |o> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u> - i|d>)$$

で与えられる。今、$\hat{\sigma}_x$ の固有状態 $|r>, |l>$ を基底に選んで$|i>, |o>$ を次のように表したとする。

$$|i> = \alpha_r|r> + \alpha_l|l>, \quad |o> = \beta_r|r> + \beta_l|l>.$$

この時の係数、$\alpha_r, \alpha_l, \beta_r, \beta_l$ を求めよ。（ヒント：例えば、$\alpha_r = <r|i>$ を計算する。）

(4) $\hat{\sigma}_x$ の固有状態 $|r>, |l>$ を基底に選んだ時、$\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ に対するPauli行列 の表現（行列要素）は変化する。例えば、$\hat{\sigma}_x \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のようになる（対角行列になっている事に注意せよ）。$\hat{\sigma}_y$ に対する行列はどのようになるか求めなさい。
（ヒント: $\hat{\sigma}_y$ に対する行列の1行1列目の要素は $<r|\hat{\sigma}_y|r>$ から求まる。同様にして他の要素も計算する)

4. $\hat{\sigma}_x$ の固有状態 $|r>$ にあるスピンをシュテルン・ゲルラッハの装置に通してスピン成分の測定を複数回行なった。（測定は入射スピンを毎回$|r>$ の状態にリセットしてから行う。）以下の問いに答えよ。

(1) σ_y 成分を測定した結果、$\sigma_y = +1$ と$\sigma_y = -1$ の結果がある確率で得られた。それぞれの確率を求めよ。

(2) (1)の場合の期待値 $<\hat{\sigma}_y>_r$ と $<\hat{\sigma}_y^2>_r$ を求めよ。

(3) (1)の場合の分散 $<(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_r = <\hat{\sigma}_y{}^2> - <\hat{\sigma}_y>^2$ を求めよ。

(4) $\hat{\sigma}_x$ 成分を測定した場合、$\sigma_x = +1$ と$\sigma_x = -1$ の観測結果はそれぞれどのような確率で出現するか求めよ。

(5) (4)の場合の期待値 $<\hat{\sigma}_x>_r$ と分散 $<(\Delta\hat{\sigma}_x)^2>_r$ を求めよ。

(6) $\hat{\sigma}_x$ と$\hat{\sigma}_y$ の交換関係は $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = \alpha\hat{\sigma}_z$ となる。係数 α を求めよ。

(7) 不確定性関係 $<(\Delta\hat{\sigma}_x)^2>_r <(\Delta\hat{\sigma}_y)^2>_r \geq \dfrac{1}{4}|<[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y]>_r|^2$ を満たしている事を示せ。

5. $t=0$の時、$\hat{\sigma}_x$ の固有状態 $|r>$ にあるスピンに z方向に一様な磁場を加えた。この時のハミルトニアンは $\hat{H} = \dfrac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z$ と書ける。以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 $t = t\ (>0)$ の時の状態を求めよ。（時間発展演算子は $\hat{U}(t) = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$ で与えられる。）

(2) 時刻 t にσ_z を測定した。期待値 $<\hat{\sigma}_z>_t$ を求めよ。

(3) (2)の代わりに 時刻 t にσ_x を測定した。期待値 $<\hat{\sigma}_x>_t$ を求めよ。

(4) (2)の代わりに 時刻 t にσ_y を測定した。期待値 $<\hat{\sigma}_y>_t$ を求めよ。

(5) スピンの期待値はどのような運動をしていると考えられるか。

6. 位置表示での「位置演算子 $\hat{x}$ の固有関数」を求めよ。